TITLE:
補間空間の理論と応用の若干 (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究会報告集)

AUTHOR(S):
吉川, 敦

CITATION:
吉川, 敦. 補間空間の理論と応用の若干 (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 88: 45-65

ISSUE DATE:
1970-04

URL:
http://hdl.handle.net/2433/108099

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
88巻 1970年 45-65

補間空間の理論と応用の若干

東大 理　吉川 敦

§0. はじめに

この話においては，二つのBanach空間の実補間空間の理論の概略を説明し，その応用としていくつかの埋込み定理を取扱ってみたい。まず本質的な内容をつぎの簡単な例によって示そう。

$B_p^{s,r}(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, $1\le r\le\infty$, $s>0$, によって，$L^p(\mathbb{R})$の意味で$[s]$階微分可能（$[s]$はsより小さい，最大自然数）な函数fであって，かつ，$(\frac{d}{dx})^{[s]}f(x)$が

$$\left[\int_0^{+\infty} t^{-(s-[s])r-1}\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|(\tfrac{d}{dx})^{[s]}f(x)-(\tfrac{d}{dx})^{[s]}f(x+t)\right|^p dx\right\}^{\frac{r}{p}}dt\right]^{\frac{1}{r}}<\infty$$

をみたすようなfの全体からなるBanach空間をあらわそう。（sが整数のとき，およびpまたは$r=\infty$のときやや修正を要する）。このとき，つぎの埋込み関係が知られている：

(0.1) $\quad B_p^{s,r}(\mathbb{R})\subsetneq B_q^{t,r}(\mathbb{R})$, $1\le r\le\infty$, $t=s-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>0$, $s>0$, $1\le p<q\le\infty$.

これは，たとえばNikol'skiiの著書[6]に見るように，整函数近

似の理論に基いて導くことができる。しかし，われわれは，そのような立場をとらずに，空間$B_p^{s,r}(R)$が実補間空間の理論によって得られることに着目して出発する。詳しくは以下に述べること，または引用文献[2][4][5][10]によるべきであるが$B_p^{s,r}(R)$は実補間空間として，$L^p(R)$と$L^p(R)$に定義された平行移動(半)群の生成作用素$A_p=\frac{d}{dx}$のm乗($m>s$)の定義域$D(A_p^m)$の間の平均空間

(0,2) $$B_p^{s,r}(R)=(L^p(R),D(A_p^m))_{\frac{s}{m},r}$$

として得られる。一方，平行移動(半)群の生成作用素のレゾルヴェントについては

$$(\lambda-A)^{-1}f(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x+t)\,dt,\qquad \lambda>0,$$

に基いて，簡単な計算により，$(\lambda-A)^{-1}$は$L^p(R)$から$L^q(R)$，$p<q$，への有界作用素であって，かつ，ノルムは

(0,3) $$\|(\lambda-A)^{-1}\|_{L_p\to L_q}\leqq L\lambda^{\sigma-1},\quad \lambda>0,$$

$\sigma=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$，$L=(1-\sigma)^{1-\sigma}$，をみたすことがわかる。

さて，(0,2)において本質的なのはA_pが半群の生成作用素であるということであって，これと(0,3)型の評価を合せれば，(0,2)型の定義で得られる補間空間の間に(0,1)型の埋込み関係が成立することを述べるのが，この話の内容といえる。

一方，たとえば，$L^p(R)$におけるGauss核：

$$G(t)f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_R e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}f(y)\,dy,\qquad t>0,$$

を考えてみると，$G(t)$ は $L^p(\mathbb{R})$ から $L^q(\mathbb{R})$，$p<q$，への有界作用素になっていて，そのノルムは

(0,4) $\quad \|G(t)\|_{L^p\to L^q} \leqq c\,t^{-\sigma}, \quad t>0,\ \sigma>0,$

$\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$，$c=(2\pi)^{-\sigma}(1-\sigma)^{\frac{1}{2}-\sigma}$，をみたしていることがわかる。(0,4) 型の評価から (0,3) 型の評価を得ることができるのでこの場合にも $L^p(\mathbb{R})$ と $G(t)$ の生成作用素 $A_p=-\frac{d^2}{dx^2}$ の m 巾の定義域 $\mathcal{D}(A_p^m)$ との平均空間を考えれば，これらの間にも埋込み関係が成立する：

(0,2′) $\quad \Lambda(s,p,r;\mathbb{R}) = \left(L^p(\mathbb{R}), \mathcal{D}(A_p^m)\right)_{\frac{s}{2m},r}, \quad s>0,\ 1\leq p,r\leq\infty,\ s<2m$

(0,1′) $\quad \Lambda(s,p,r;\mathbb{R}) \subsetneqq \Lambda\left(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{q},q,r;\mathbb{R}\right), \quad 1\leq p<q\leq\infty.$

この空間 $\Lambda(s,p,r;\mathbb{R})$ は Taibleson [8] によって取扱われた Lipschitz 空間である。

なお，上の場合 $G(t)$ は解析的半群であったが (0,4) 型の評価は $G(t)$ が解析的でなくても成立する。たとえば

(0,5) $\quad G(t)f(x)=e^{itx^4-tx^2}f(x), \qquad t\geqq 0,$

を考えれば

(0,4′) $\quad \|G(t)f(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqq (\pi\sigma)^{\frac{\sigma}{2}}\,t^{-\frac{\sigma}{2}}\,\|f(x)\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad \sigma=\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\ p<q$

がわかる。(0,5) のような半群は，牛島氏 [9] によって取扱われている。

もちろん，われわれの立場に立てば (0,3) または (0,4) 型の評価が得られればよいので，境界条件が付いていてもかまわな

い。例として後に半空間における$-\Delta$にDirichlet条件またはNeumann条件の付いた場合を考察しよう。この場合には，L^pにおける$-\Delta$の実現の分数巾の定義域とL^qにおける分数巾の定義域の間の埋込み関係を得ることもできる。

§1. 実補間空間の理論

1.1. E, Fを二つのBanach空間とする。分離公理をみたす線型位相空間$\mathcal{E}$があって，$E \subseteq \mathcal{E}$, $F \subseteq \mathcal{E}$がなりたつとする[(1)]。このときLions-Peetre両氏[5]に従って，E, Fの平均空間

(1.1) $$S(r,\theta,E;r,\theta-1,F) = \underline{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F) = (E,F)_{\theta,r},\quad 0<\theta<1,\ 1\le r\le\infty,$$

をつぎのように定義することができる。定義をする前に必要な記号を導入する：XをBanach空間とするとき$L^r_*(X)$, $1\le r\le\infty$, をもって正実軸$\mathbb{R}^+$で定義され値をXにとる強可測な函数$f(t)$でつぎの条件(1.2)をみたすものの全体からなるBanach空間をあらわそう：

(1.2) $$\begin{cases} \left[\int_0^\infty \|f(t)\|_X^r \dfrac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}} < \infty, & 1\le r<\infty, \\ \sup\limits_{t>0} \|f(t)\|_X < \infty, & r=\infty \end{cases}$$

<u>空間$S(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$の定義.</u> $u(t)$を$\mathcal{E}$に値をとる函数で

(1.3) $$t^\theta u(t) \in L^r_*(E), \qquad t^{\theta-1}u(t) \in L^r_*(F)$$

---

(1) 二つの位相空間X, Yについて，$X \subseteq Y$と書くときは，XがYに集合として含まれ，かつ$X \ni x \mapsto x \in Y$が連続であることを意味する。

をみたすものとする。このとき

(1.4) $$a = \int_0^{\infty} u(t)\frac{dt}{t}$$

の張る空間を $S(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$ であらわす。これは，ノルム

(1.5) $$\|a\|_{S(r,\theta,E;r,\theta-1,F)} = \inf\left\{\max \|t^{\theta}u(t)\|_{L_*^r(E)},\ \|t^{\theta-1}u(t)\|_{L_*^r(F)}\right\}$$

によってBanach空間になる。ただし，infは(1.3)(1.4)をみたす $u(t)$ 全体に対してとる。

<u>空間 $\underset{=}{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$ の定義</u>　$v(t)$, $w(t)$ を $\mathcal{E}$ に値をとる函数で

(1.6) $$t^{\theta}v(t)\in L_*^r(E),\qquad t^{\theta-1}w(t)\in L_*^r(F)$$

をみたすものとする。このとき

(1.7) $$a = v(t)+w(t),\qquad a.e.\ t>0$$

の張る空間を $\underset{=}{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$ であらわす。これはノルム

(1.8) $$\|a\|_{\underset{=}{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F)} = \inf\max\left\{\|t^{\theta}v(t)\|_{L_*^r(E)},\ \|t^{\theta-1}w(t)\|_{L_*^r(F)}\right\}$$

によってBanach空間になる。ただし，infは(1.7)が成立するような，v, w で(1.6)をみたすものの全体に対してとる。

<u>命題1.1</u>　$1\le r\le\infty$，$0<\theta<1$ に対し，Banach空間として

(1.1) $$S(r,\theta,E;r,\theta-1,F) = \underset{=}{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$$

がなりたつ。この空間を，以下，$(E,F)_{\theta,r}$ とあらわし，E, F の平均空間という。

<u>注意1.1</u>　上記の定義は各 n 個のBanach空間の場合に拡張することもできる。しかし，その場合命題1.1にあたることは，$n\ge 3$ のときは一般には成立しない。

注意1.2. 平均空間と同値な空間を与えるものにLions氏のトレース空間というのがある。これはつぎの定義から明らかなように境界値の集合であるので，境界値問題を考える際には，この定義に基いた方がわかりやすい。

トレース空間 $T(r,\theta-\frac{1}{r},E;r,\theta-\frac{1}{r},F)$，$1\le r\le\infty$，$0<\theta<1$，の定義：$u(t)$ を $\mathcal{E}$ に値をとる R^+ で定義された函数で

(1.9) $$t^\theta u(t)\in L^r_*(E),\qquad t^\theta\frac{d}{dt}u(t)\in L^r_*(F)$$

をみたすものとする。このとき

(1.10) $$a=u(0)$$

の張る空間を $T(r,\theta-\frac{1}{r},E;r,\theta-\frac{1}{r},F)$ であらわす。これはノルム

$$\|a\|_{T(r,\theta-\frac{1}{r},E;r,\theta-\frac{1}{r},F)}=\inf\max\left\{\|t^\theta u(t)\|_{L^r_*(E)},\ \|t^\theta\tfrac{d}{dt}u(t)\|_{L^r_*(F)}\right\}$$

によってBanach空間になる。ただし inf は(1.9)(1.10)をみたす u 全体に対してとる。Banach空間として

(1.11) $$T(r,\theta-\frac{1}{r},E;r,\theta-\frac{1}{r},F)=(E,F)_{\theta,r}$$

がいえる。

1.2. 後に必要になる平均空間の性質を以下に述べる。

命題1.2. Banach空間 E,F,E_1,F_1 を考える。分離公理をみたす線型位相空間 $\mathcal{E},\mathcal{E}_1$ があって，$E,F\subseteq\mathcal{E}$，$E_1,F_1\subseteq\mathcal{E}_1$ をみたしているとしよう。L を $\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}_1$ への線型作用素とする。L が E から E_1，F から F_1 へのそれぞれノルム A，B の有界作用素であるならば，L は $(E,F)_{\theta,r}$ から $(E_1,F_1)_{\theta,r}$ への有界作用素であって

そのノルムは const. $A^{1-\theta}B^{\theta}$ である。

<u>命題1.3.</u> $1\leq r\leq r_1\leq\infty$ ならば、

$$(E,F)_{\theta,r}\subseteq(E,F)_{\theta,r_1},\quad 0<\theta<1$$

が成立する。

<u>命題1.4.</u> つぎのことがなりたつ：

$$(E,F)_{\lambda,r}=((E,F)_{\theta_0,r},(E,F)_{\theta_1,r})_{\theta,r},\quad \lambda=(1-\theta_0)\theta+\theta_1\theta,\ 0<\theta<1,$$

$0\leq\theta_0<\theta_1\leq1$. ただし $(E,F)_{0,r}=E$, $(E,F)_{1,r}=F$ とする。

<u>命題1.5</u> $E\subseteq F$ ならば

$$(E,F)_{\theta_0,r}\subseteq(E,F)_{\theta_1,r},\quad 0\leq\theta_0<\theta_1\leq1$$

である。

<u>注意1.3</u> 命題1.4, 1.5 は $(E,F)_{\theta_i,r}$ の代りに

$$(E,F)_{\theta_i,1}\subseteq X_i\subseteq(E,F)_{\theta_i,\infty},\quad i=0,1$$

をみたす Banach 空間 X_i に対しても成立する。

§2 ある種の閉作用素と平均空間

E を Banach 空間とする。A を E で定義された閉作用素でつぎの条件をみたすものとする。すなわち A は non-negative:

(2.1) $\lambda>0$ は $-A$ のレゾルヴェント集合に入り

$$\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\|\leq M$$

がなりたつ。ただし、M は定数。さらに A の定義域 $D(A)$ は E において稠密であるとしよう。たとえば、$G(t)$, $t\geq0$, を E にお

ける有界作用素の(C_0)-半群とし，その生成作用素を$-A$とすれば，Aは non-negative である。

ある自然数mに対しAのm巾をA^m，その定義域を$D(A^m)$と書く。このとき，以下のことがらがなりたつ。

<u>命題2.1.</u> 空間$(E, D(A^m))_{\theta,r}$，$0<\theta<1$，$1\leq r\leq\infty$，は

$$t^{\theta m}(A(t+A)^{-1})^m x\in L^r_*(E)$$

をみたす$x\in E$の全体であって，そのノルムは

$$\|x\|_{(E,D(A^m))_{\theta,r}} = \|x\|_E + \|t^{\theta m}(A(t+A)^{-1})^m x\|_{L^r_*(E)}$$

である。

<u>注意2.1</u>

(2.2) $\qquad u(t)=c_m\ t^m A^m(t+A)^{-2m}x,\quad t>0,\quad c_m=\Gamma(2m)/\Gamma(m)^2$

とおく。このとき

(2.3) $\qquad t^{m\theta}u(t)\in L^r_*(E),\qquad t^{m\theta-m}u(t)\in L^r_*(D(A^m))$

(2.4) $\qquad x=\displaystyle\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$

がなりたち，さらに，Grisvard氏によれば

(2.5) $\qquad \max\{\|t^{m\theta}u(t)\|_{L^r_*(E)},\ \|t^{m\theta-m}u(t)\|_{L^r_*(D(A^m))}\}\leq C\|x\|_{(E,D(A^m))_{\theta,r}}$

が成立する。

<u>命題2.2.</u> $m, n>0$を自然数，$0<\theta,\varphi<1$とする。$m\theta=n\varphi$ならば，

(2.6) $\qquad (E, D(A^m))_{\theta,r} = (E, D(A^n))_{n\varphi,r}$

がなりたつ。

<u>命題2.3.</u> $m, n>0$ を自然数とする。$0<\theta-\frac{n}{m}<\theta<1$ としよう。このとき，つぎの二条件(2.7), (2.8)は同値である。

(2.7) $\quad x \in (E, D(A^m))_{\theta, r}$

(2.8) $\quad x \in D(A^n)$ かつ $A^n x \in (E, D(A^m))_{\theta-\frac{n}{m}, r}$.

<u>注意2.2.</u> 命題2.2, 2.3における $m, n>0$ は実数でよい。

とくに，$-A$ が (C_0) 半群 $G(t)$, $t\geqq 0$, の生成作用素であるときには，つぎの命題がなりたつ。

<u>命題2.4</u> 空間 $(E, D(A^m))_{\theta, r}$ は

(2.9) $\quad t^{-m\theta}(I-G(t))^m x \in L_*^r(E)$

をみたす，すべての $x \in E$ からなるBanach空間である。そのノルムは

$$\|x\|_E + \|t^{-m\theta}(I-G(t))^m x\|_{L_*^r(E)}$$

であたえられる。

<u>命題2.5</u> $G(t)$ がとくに解析的半群とする。このとき $(E, D(A^m))_{\theta, r}$

(2.10) $\quad t^{m-m\theta} A^m G(t)x \in L_*^r(E)$

をみたす，すべての $x \in E$ からなるBanach空間である。ノルムは，

$$\|x\|_E + \|t^{m-m\theta} A^m G(t)x\|_{L_*^r(E)}$$

であたえられる。

<u>注意2.3</u> 命題2.5において，m は正の実数でよい。

論理的な順序はやや狂うが，$\alpha>0$ に対し，つぎのことがな

りたつ。

命題2.6　$m>\alpha$ とする。

$$(E,D(A^m))_{\frac{\alpha}{m},1} \subsetneq D(A^\alpha) \subsetneq (E,D(A^m))_{\frac{\alpha}{m},\infty}.$$

§3　埋込み定理

$E, F, \mathcal{E}$ を§1のようにとる。A を $\mathcal{E}$ の $\overbrace{\text{線型}}^{\text{連続な}}$ 作用素で $\lambda+A$, $\lambda>0$, が一対一であるとしよう。さらに、A を E に制限した作用素を A_E とする。すなわち

$$(3.1)\qquad D(A_E)=\{x\in E;\ Ax\in E\}.$$
$$A_E x = Ax,\qquad x\in D(A_E)$$

A_F についても同様。A_E, A_F は明らかに閉作用素である。つぎの仮定をおく；

(3.2)　A_E, A_F は non-negative,

$D(A_E)$, $D(A_F)$ はそれぞれ E, F において稠密.

したがって§2に基いて $(E,D(A_E^m))_{\theta,r}$, $(F,D(A_F^m))_{\theta,r}$ を計算できる。このとき、Grisvard氏によれば、

命題3.1　Banach空間として、

$$((E,D(A_E^m))_{\theta,r},(F,D(A_F^m))_{\theta,r})_{t,r}=(X,D(A_X^m))_{\theta,r}$$

ただし、$0<\theta<1$, $1\le r\le\infty$, $0<t<1$, $X=(E,F)_{t,r}$, A_X は A を X に制限した作用素である。

定義3.1　$A\in(\sigma,E,F)$, $\sigma>0$, とは $\lambda>0$ に対し, $(\lambda+A)^{-1}$ が

EからFの作用素として有界であって，かつ

(3.3) $\qquad \|(\lambda+A)^{-1}\|_{E\to F} \leq L\lambda^{\sigma-1}, \qquad L$：定数$>0$,

がなりたつ作用素Aをいう。

また，別な場合として，$G(t)$, $t\geq 0$, が$\mathcal{E}$における作用素の半群とし，$G(t)$をE，Fに制限した作用素族$G_E(t)$, $G_F(t)$が，それぞれ，E，Fにおける(C_0)半群になっている場合を考えよう。

<u>定義3.2</u> $G(t)\in S(\sigma,E,F)$, $\sigma>0$, とは$t>0$に対し，$G(t)$がEからFの作用素として有界で，かつ

(3.4) $\qquad \|G(t)\|_{E\to F} \leqq Kt^{-\sigma}, \qquad K>0,$

がなりたつ$G(t)$をいう。

命題1.2および命題3.1によってE，Fの間に空間の鎖$(E,F)_{\theta_i,r_i}$ $0\leq\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{N-1}<\theta_N=1$, $1\leq r_i\leq\infty$, をはめこんで考えればよいので，以下の議論で，定義3.1，3.2のσを

(3.5) $\qquad 0<\sigma<1$

と仮定して差仕えない。このとき，つぎのことがいえる。

<u>命題3.2</u> $G(t)$の生成作用素を$-A$とする。$G(t)\in S(\sigma,E,F)$ならば$A\in(\sigma,E,F)$である。

<u>命題3.3</u> $A\in(\sigma,E,F)$とする。このとき，つぎの埋込み定理がなりたつ。ただし，$0<\theta<\theta+\frac{\sigma}{m}<1$, $1\leq r\leq\infty$：

$$(E, D(A_E^m))_{\theta+\frac{\sigma}{m},r} \subsetneqq (F, D(A_F^{\,m}))_{\theta,r}.$$

§4 命題3.2 および3.2の証明

これらの証明では、必要に応じて補間定理を用いればよいから，$0<\sigma<1$ としておいて，一般性を失わない。

命題3.2は，次の公式から直ちに従う：

$$(\lambda+A)^{-1}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)\,dt\,,\quad \lambda>0.$$

命題3.3を証明する。$a\in(E,D(A_E^m))_{\theta+\frac{\sigma}{m},r}$ とする。

$$u_k(t)=\frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2}\,t^kA_E^k(t+A_E)^{-2k}a$$
$$=\frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2}\,t^kA^k(t+A)^{-2k}a$$

とおく。ただし，$k\geqq m$，$t>0$。命題2.1および注意2.1より

$$(4.1)\quad\begin{cases}t^{m\theta+\sigma}u_k(t)\in L_*^r(E)\\ t^{m\theta+\sigma-k}A^ku_k(t)\in L_*^r(E)\end{cases}$$

$$(4.2)\qquad a=\int_0^\infty u_k(t)\frac{dt}{t}$$

である。一方，仮定から，

$$\|u_{m+1}(t)\|_F\leqq \text{const.}\ t^\sigma\|u_m(t)\|_E$$
$$\|A^mu_{m+1}(t)\|_F\leqq \text{const.}\ t^\sigma\|A^mu_m(t)\|_E$$

であるから，(4.1)より

$$(4.3)\quad\begin{cases}t^{m\theta}u_{m+1}(t)\in L_*^r(F)\\ t^{m\theta-m}A^mu_{m+1}\in L_*^r(F)\end{cases}$$

それゆえ，$b=\int_0^\infty u_{m+1}(t)\frac{dt}{t}$ は F で収束して，$b\in(F,D(A_F^m))_{\frac{\theta}{m},r}$。しかるに，E では $a=b$ であるから，$a\in(F,D(A_F^m))_{\theta/m,r}$.

閉グラフ定理から

$$\|a\|_{(F, D(A_F^m))_{\frac{\theta}{m}, r}} \leq \mathrm{Const.}\ \|a\|_{(E, D(A_E^m))_{\frac{\theta}{m}+\sigma, r}} .$$

§5. 分数巾の定義域と埋込み関係

定義5.1. A^{-1}, A_E^{-1}, A_F^{-1} は有界とする。$A \in \Sigma(\sigma, E, F)$, $\sigma > 0$, とは, A_E, A_F が non-negative であって, かつ, $A^{-\sigma}$ が E から F への作用素として有界であることをいう。

命題5.1. $-A$ は (C_0) 半群 $G(t)$ の生成作用素とする。$G(t)$ が解析的であるときは, $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$ ならば $G(t) \in S(\sigma, E, F)$ である。

実際 $G(t) = A^{-\sigma} A^{\sigma} G(t) = A^{\sigma} G(t) A^{-\sigma}$ であるから

$$\|G(t)\|_{E \to F} \leq \|A^{\sigma} G(t)\|_{F \to F} \ \|A^{-\sigma}\|_{E \to F} \leq \mathrm{Const}\ t^{-\sigma}$$

が得られる。

命題5.2. $0 < \sigma < 1$ とする。次の三条件は同値である;

(5.1) $D(A_E) \subset D(A_F^{1-\sigma})$;

(5.2) $D(A_E^{\alpha+\sigma}) \subset D(A_F^{\alpha})$, $\forall \alpha > 0$;

(5.3) $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$

証明には, 分数巾の定義 (小松[4]) と, 命題5.1, 命題3.3, 命題2.6 を用いれば, 容易である。

命題5.1の逆は一般に成立せず, 反例としては,

$$(G(t) f)(x) = e^{-t(1+x^2)} f(x), \quad f \in L^p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < \infty$$

がある。実際，これは，解析的半群を各$L^p(\mathbb{R})$でなく，

$$G(t)\in S\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{q}\right), L^q(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right),\quad 1\leqq p<q<\infty$$

をみたすが，その生成作用素$-A$については，

$$A\in\Sigma\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{q}\right), L^q(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right)$$

は，p, q，$1\leqq p<q<\infty$，をどう選んでも成立しない。

二，三の特別な場合を考察する。

<u>命題5.3.</u> $F\subset E$とする。A^{-1}がEからFの作用素として有界であるための必要十分条件は，$D(A_E)\subset F$である。

これを用いると，函数論的補間空間（Calderon [12]）より，

<u>命題5.4.</u> $F\subset E$とする。もし，あるBanach空間Xがあって$D(A_E)\subset X$かつ$F=[E,X]_\theta$がある$\theta\in]0,1[$に対して成立するとする。このとき，$[E, D(A_E)]_\theta\subset F$である。ただし$[Y,Z]_\theta$は，Banach空間$Y$と$Z$の函数論的な補間空間をあらわす。すなわち，$0\leqq \mathrm{Re}\, z\leqq 1$で定義され，値を$Y+Z$にとる連続函数$f(z)$で，$0<\mathrm{Re}\, z<1$において正則，かつ，

$$\|f(iy)\|_Y,\quad \|f(1+iy)\|_Z\qquad (y\in\mathbb{R})\to 0,\ |y|\to\infty,$$

をみたすものの全体を$\mathcal{H}$とおくとき，

$$[Y,Z]_\theta=\{f(\theta);\ f\in\mathcal{H}\}$$

である。ノルムは，

$$\|a\|_{[Y,Z]_\theta}=\inf_{\substack{f(\theta)=a\\ f\in\mathcal{H}}}\left\{\max\left[\sup_{y\in\mathbb{R}}\|f(iy)\|_Y,\ \sup_{y\in\mathbb{R}}\|f(1+iy)\|_Z\right]\right\}$$

で与えられる。

これより，

<u>命題5.5</u>　命題5.4と同じ仮定のもとで考える。もし，$[E, D(A_E)]_\theta = D(A_E{}^\theta)$ ならば，$A \in \Sigma(\theta, E, F)$ である。

分数巾の定義域が上記の場合のように与えられるためには

$$\|A^{ik}\| \leqq Const\ e^{\omega|k|}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \omega = 定数$$

が成立すればよい。これについては，藤原氏，島倉氏の研究がある他，E が Hilbert 空間，A が自己共役の場合には，明らかである。

第二の特別な場合として，つぎのような場合を考える。E，F を今までのような Banach 空間とし，さらに，E_1，F_1 という Banach 空間と，$E_1, F_1 \subsetneq \mathcal{E}_1$ なる分離公理をみたす線型位相空間が存在するとしよう。$\mathcal{E}_1$ から $\mathcal{E}$，および $\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}_1$ に線型写像 L，R がそれぞれ存在して，これらが，

$$E_1 \xrightarrow{L} E \xrightarrow{R} E_1,$$
$$F_1 \xrightarrow{L} F \xrightarrow{R} F_1,$$

の写像として連続であり，かつ，$RL = 1$ を満足するとしよう。$P = LR$ とおけば，P は，$E \to E$，$F \to F$ の写像として有界であって，$P^2 = P$ をみたすことがわかる。

<u>命題5.6.</u> $\lambda > 0$ に対し，$(\lambda + A_E)^{-1} P = P(\lambda + A_E)^{-1}$，$(\lambda + A_F)^{-1} P = P(\lambda + A_F)^{-1}$ とする。このとき，$A \in (\sigma, E, F)$ ならば，$RAL \in (\sigma, E_1, F_1)$，$G(t) \in S(\sigma, E, F)$ ならば

$RG(t)L \in S(\sigma, E_1, F_1)$, また, $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$ ならば $RAL \in \Sigma(\sigma, E_1, F_1)$ である。

§6 例

例6.1. $L^p(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R})$ における平行移動(半)群の生成作用素を $-A$ とする。このとき,

(6.1) $\quad A \in (\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, L^p(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))$, $\quad 1 \leq p < q < \infty$,

(6.2) $\quad A \in (\frac{1}{p}, L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R}))$, $\quad 1 \leq p < \infty$

がなりたつ。

証明は, 本質的には Hausdorff-Young の不等式を用いればよい。

例6.2. $L^p(\mathbb{R}^n)$, $C(\mathbb{R}^n)$ における Gauss 核から得られる半群を $G(t)$ とする:

$$(G(t)f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^{\,n}} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y)\,dy, & t > 0 \\ f(x), & t = 0. \end{cases}$$

このとき,

(6.3) $\quad G(t) \in S(\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$, $\quad 1 \leq p < q < \infty$.

(6.4) $\quad G(t) \in S(\frac{n}{2p}, L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R}^n))$, $\quad 1 \leq p < \infty$,

(6.5) $\quad 1-\Delta \in \Sigma(\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$, $\quad 1 < p < q < \infty$

がなりたつ。

(6.5) は Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式 ([3], [7]) から, 直

ちに従う。

<u>例6.3.</u> $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ における $-\Delta$ の Dirichlet 条件または Neumann 条件のもとでの実現を $-A$ とする。このとき，

(6.6) $\quad 1+A \in \Sigma\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}^n_+), L^q(\mathbb{R}^n_+)\right), \ 1<p<q<\infty$

がなりたつ。

(6.5) と命題 5.6 を用いればよい。Dirichlet 条件の場合には $E_1=L^p(\mathbb{R}^n_+)$, $F_1=L^q(\mathbb{R}^n_+)$, $E=L^p(\mathbb{R}^n)$, $F=L^q(\mathbb{R}^n)$ として，

$$(Lf)(x)=\begin{cases} f(x) & x_n>0 \\ -f(x',-x_n) & x_n<0, \quad x'=(x_1,\cdots,x_{n-1}) \end{cases} \qquad f\in E_1 \ (\text{または } F_1)$$

$$(Rg)(x)=\frac{1}{2}\left[g(x',x_n)-g(x',-x_n)\right]\Big|_{\mathbb{R}^n_+}, \quad g\in E \ (\text{または } F)$$

ととればよい。Neumann 条件の場合には，偶函数に拡張する。これは藤原氏の技巧である。

<u>例6.4.</u> A を 2 階の楕円型作用素とする。C^∞ 係数とし，主要部の係数は実数値とする。Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし境界は滑らかとする。$L^p(\Omega)$ に作用素 A_p を，

$$A_p u = Au, \quad u\in D(A_p)$$
$$D(A_p)=\{u;\ u\in W^{2,p}(\Omega),\ Bu|_{\partial\Omega}=0\}$$

ただし，$Bu=u$ または $Bu=\frac{\partial}{\partial n}u$ (n: 外法線) とする。このとき A_2 が accretive になるとしてよく，

(6.7) $\quad A\in\Sigma\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \ 1<p<q<\infty$

がなりたつ。

これは、上記の場合Aの純虚数巾が有界になることが知られているからである(藤原(c))。

<u>例6.4.</u> Aを$2m$階の楕円型作用素とする。ΩをR^nの有界領域，$\partial\Omega$はΩの境界で滑らかとする。Aの係数はΩで滑らかとしよう。$B_1, \cdots, B_m$を境界作用素とする。作用素A_pを$L^p(\Omega)$に，つぎのように定義する：

$$A_p u = Au, \quad u \in D(A_p)$$

$$D(A_p) = \{u \in W^{p,m}(\Omega);\ B_j u|_{\partial\Omega} = 0 \quad j=1,\cdots,m\}$$

もしA_2が正定値な自己共役作用素であれば，

(6.8) $$A \in \Sigma\left(\frac{n}{2m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad 1<p\leq 2\leq q<\infty$$

がなりたち，したがって

(6.9) $$A \in \left(\frac{n}{2m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad 1<p<q<\infty$$

がなりたつ。

証明は命題5.5と、補間定理による。(6.8)が$p\leq 2\leq q$の制限なしに成立するかどうかについては、筆者は、まだ、何ともいえない。

§∞ 文献.

1. Fujiwara Daisuke (a) Concrete characterization of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, Proc Japan Acad 43 (1967) 82-86. ; (b) L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1. 15 (1968) 169-177

2. Grisvard, Pierre, 学位論文, パリ大学, 1965.

3. Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press.

4. Komatsu Hikosaburo (a) Fractional powers of operators, Pacific J. Math. 19 (1966) 285-346, (b) Fractional powers of operators II, Interpolation spaces, ibidem. 21 (1967), 89-111, (c) Fractional powers of operators, III, Negative powers, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969) 205-220, (d) Fractional powers of operators, IV, potential operators, ibidem. 21 (1969) 221-228.

5. Lions & Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Pub. Math. I.H.E.S. 19 (1964), 5-68.

6. Nikol'skiĭ, S. M., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Изд. Наука, モスクワ, 1969.

7. Sobolev, S. L., Об одной теореме функционального анализа, Мат. сб. 4 (46), 1938, 471-497.

8. Taibleson, M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions

on Euclidean n-space I, Principal properties, J. MATH. MECH. 13 (1964), 407-479.

9. Ushijima Teruo, 線型作用素の半群の滑らかさについて, 発展系の数値解法予稿, 京大数解研, 1969.

10, YOSHIKAWA, A. Remarks on the theory of interpolation spaces, J. FAC. SCI. UNIV. TOKYO, Sec. 1, 15 (1968), 209-251.

11. YOSIDA, KÔSAKU, Functional Analysis, Springer-V., 1965.

§ ∞+1 文献追加

1^{bis} Fujiwara, D. (c) On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and pure imaginary powers of some second order operators, J. Math. Soc. JAPAN, 21, (1969), p. 481-522.

12. Calderón, A.P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., 24 (1964), 113-190.

13. Shimakura, Norio, (a) Problèmes aux limites variationnels du type elliptique, Ann. E.N.S., Ser. 4, 2, (1969), 255-310, (b) 東京大学理学部数学教室，解析火曜セミナー講演，1969年12月9日.

14. Agmon, Shmuel, On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962), 119-147.